

فصل اول: آسانترین برداری:

عملیات مقدماتی در بردارها:

کیست مسا $\leftarrow$ اسکالر: برای مشخص شدن آن نیاز به یک عدد داریم. باره. انرژی پتانسیل (دارد و کوچک)
 برداری $\leftarrow$ همپایان داریم (میدان الکتریکی)

معمولاً برای نمایش یک بردار از حرف بزرگ استفاده می‌کردند. $\vec{A}$
 نقطه آخر: نقطه‌ای است از فضای بردار مورد نظر از آن نقطه ترسیم می‌کردند. نقطه آخر = P

اندازه بردار $\rightarrow |\vec{A}| = A > 0$

بردار یک: برداری است که طول آن برابر واحد بوده و همواره هم جهت با بردار اصلی است.

$$\hat{a}_A = \frac{\vec{A}}{A}$$

$$\hat{a}_A = \frac{\vec{A}}{A}$$

$$\hat{a}_B = \frac{\vec{B}}{B}$$

$$\hat{a}_B = \frac{\vec{B}}{B}$$

تساوی دو بردار (بردارهای هم‌جهت):

بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را مساوی می‌توانیم بگوییم اگر هم اندازه و هم جهت یکسان داشته باشند حتی اگر در فضاهای مختلف باشند.

$$\vec{A} = \vec{B}$$

$$\vec{A} = \vec{B}$$

جمع و تفریق برداری:

(۵) جمع برداری: جمع دو بردار A و B برداری است مثل C در صفحه که رنده از بردارهای A و B قرار دارند.

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

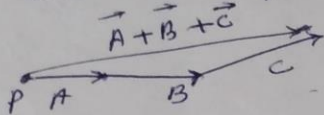
$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

(۱) روش متوازی الاضلاع: متوازی الاضلاع متشکل از دو بردار (هر بردار از یک نقطه رسم می‌شود)

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

(۲) روش ابتدایانه

بردارها راست سر یکدیگر ترسیم کنیم. برداری که انتهای اولین بردار را به انتهای آخرین بردار وصل کند.



خواص برداری:

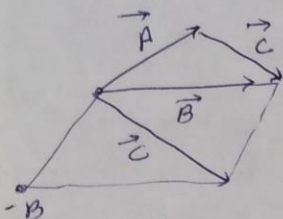
(۱) خاصیت جابجایی $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

(۲) خاصیت شرکت پذیری $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$

تغییر برداری:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

ضرب برداری:



ضرب عددی بردار: اگر عدد x در بردار A ضرب شود اندازه بردار حاصل x برابر می شود و جهت آن پس از علامت x دارد.

$x > 0 \rightarrow$ بردار هم جهت

$x < 0 \rightarrow$ بردار مخالف جهت

ضرب داخلی (عددی - اسکالر - نقطه ای یا dot product):

این ضرب همواره یک دو بردار را می دهد و جواب یک عدد می باشد.

بنابراین $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \alpha$ زاویه بین دو بردار

(زاویه بین دو بردار)

اگر $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\vec{A} \cdot \vec{B} > 0$

اگر $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

$\vec{A} \cdot \vec{B} < 0$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ (دو بردار عمود بر هم)

$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

خواص ضرب داخلی: باید ملزم از لحاظ ابعادی مثل هم باشند. مفهوم داشته باشد.

۱- خاصیت جابجایی $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

۲- خاصیت توزیع پذیری:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \text{تعریف شده}$$

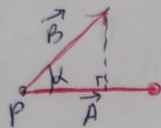
۳- شرکت پذیری: شرکت پذیری در ضرب تعریف نموده و زیر این عنوان بیش از دو بردار را به این معنی در هم ضرب کرد

$$A \cdot A = A^2 \rightarrow A = \sqrt{A \cdot A}$$

تعریف دیگر:

۴- اندازه یک بردار تصویر بردار در هم بر روی بردار اول

$$A(B \cos \alpha)$$



$B \cos \alpha$: تصویر بردار دوم

۳- ضرب خارجی (Cross Product)

این ضرب همواره یک دو بردار ایجاد می کند و جواب آن بردار است.

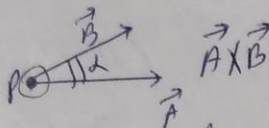
$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

اندازه یکسان است معنای اصطلاح متشکل از A و B برابر است.

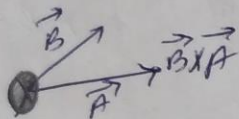
α : زاویه بین دو بردار A و B

$$C = AB \sin \alpha \quad (0 \leq \alpha \leq \pi)$$

جهت: راستای برداری که صفحه گذرنده از A و B عمود است. برای تعیین جهت واحد دست راست استفاده می شود.



جهت راست دست راست در جهت بردار اول جهت چرخش بر روی دو انگشت نمایانگر بردار C



خواص ضرب خارجی:

۱- خاصیت جابجایی:

$$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

۲- توزیع پذیری؛

توزیع پذیری بر A عدد دلالت

توزیع پذیری بر C عدد دلالت

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$$

صغیر B و C

صغیر A و B

جای پر است و قانون است

۳- شرکت پذیری؛

کلاً در ضرب شرکت پذیری نداریم.

← $\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C}$ قابل قبول نیست.

در ضرب سه گانه جبراری؛

تکانه $\vec{B} \times \vec{C} - \vec{C} \times \vec{B}$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

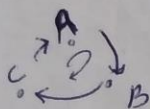
حاصل ضرب فوق برداری است که در صغیر B و C قرار دارد.

تذکر: ضرب سه گانه عددی؛

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

برابر است با حجم متوازی الاضلاع

جهت ساعتگرد



$$\frac{\vec{A}}{\vec{B}}$$

تکانه: تقسیم در بردار تعریف شده است

$$\begin{cases} \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot \vec{C} \\ \vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} \times \vec{C} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{C}$$

دستگاه مختصات در حالت کلی:

در نقطه در فضای سه بعدی توسط سه عدد معرفی می شود. این سه عدد معروف سه رویه می باشند که از محل

مختصات آن ها همان نقطه مختص به فرد پیدا خواهد شد

برای معرفی مختصات بردار در یک دستگاه مختصات نیاز به معیارها

یک بردار پایه داریم. هر یک بردارهای پایه در آن است

هر بردار دلخواه را می توان بر حسب ترکیب خطی آن ها بیان نمود

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \text{ثابت} = u_{10} \\ u_2 &= \text{ثابت} = u_{20} \\ u_3 &= \text{ثابت} = u_{30} \end{aligned} \right\}$$

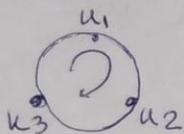
$$\hat{a}_{u_1}, \hat{a}_{u_2}, \hat{a}_{u_3} = \text{بردارهای پایه}$$

خصوصیات بردارهای پایه:

$$1) \hat{a}_{u_1} \cdot \hat{a}_{u_1} = \hat{a}_{u_2} \cdot \hat{a}_{u_2} = \hat{a}_{u_3} \cdot \hat{a}_{u_3} = 1$$

$$2) \hat{a}_{u_1} \cdot \hat{a}_{u_2} = \hat{a}_{u_1} \cdot \hat{a}_{u_3} = \hat{a}_{u_2} \cdot \hat{a}_{u_3} = 0 \quad (\text{بردارهای پایه دو به دو بر هم عمودند (متعامد)})$$

$$3) \begin{cases} \hat{a}_{u_1} \times \hat{a}_{u_2} = \hat{a}_{u_3} \\ \hat{a}_{u_2} \times \hat{a}_{u_3} = \hat{a}_{u_1} \\ \hat{a}_{u_3} \times \hat{a}_{u_1} = \hat{a}_{u_2} \end{cases}$$



$$\vec{A} = A_1 \hat{a}_{u_1} + A_2 \hat{a}_{u_2} + A_3 \hat{a}_{u_3}$$

$$\vec{B} = B_1 \hat{a}_{u_1} + B_2 \hat{a}_{u_2} + B_3 \hat{a}_{u_3}$$

مقادیرهای یک بردار هم می توانند اعداد مثبت باشند یا هر کدام یک تابع سه متغیره

اندازه بردار:

$$A = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

ضرب داخلی

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

3) ضرب متربی:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{a}_1 & \hat{a}_2 & \hat{a}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \hat{a}_1(A_2B_3 - A_3B_2) - \hat{a}_2(A_1B_3 - A_3B_1) + \hat{a}_3(A_1B_2 - A_2B_1)$$

ضرب متربی:

1- در فضای 3 بعدی، بردارهای $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ را در نظر بگیرید. اگر این بردارها همبسته باشند، یعنی در یک صفحه قرار دارند، حاصل ضرب متربی آنها صفر خواهد بود. اگر این بردارها همبسته نباشند، یعنی در یک فضای 3 بعدی قرار دارند، حاصل ضرب متربی آنها یک بردار عمود بر آن فضای 3 بعدی خواهد بود. این بردار عمود را می‌توان به کمک فرمول زیر محاسبه کرد:

$$d\vec{L} = (dl_1)\hat{a}_1 + (dl_2)\hat{a}_2 + (dl_3)\hat{a}_3$$

2- بردارهای $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ را در نظر بگیرید. اگر این بردارها همبسته باشند، یعنی در یک صفحه قرار دارند، حاصل ضرب متربی آنها صفر خواهد بود. اگر این بردارها همبسته نباشند، یعنی در یک فضای 3 بعدی قرار دارند، حاصل ضرب متربی آنها یک بردار عمود بر آن فضای 3 بعدی خواهد بود. این بردار عمود را می‌توان به کمک فرمول زیر محاسبه کرد:

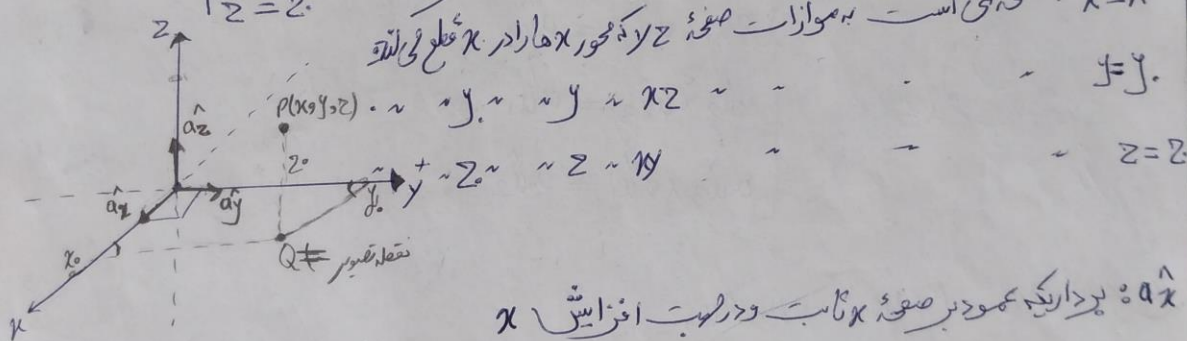
$$(u_1, u_2, u_3) = (h_1 du_1)\hat{a}_1 + (h_2 du_2)\hat{a}_2 + (h_3 du_3)\hat{a}_3$$

3- بردارهای $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ را در نظر بگیرید. اگر این بردارها همبسته باشند، یعنی در یک صفحه قرار دارند، حاصل ضرب متربی آنها صفر خواهد بود. اگر این بردارها همبسته نباشند، یعنی در یک فضای 3 بعدی قرار دارند، حاصل ضرب متربی آنها یک بردار عمود بر آن فضای 3 بعدی خواهد بود. این بردار عمود را می‌توان به کمک فرمول زیر محاسبه کرد:

این ضرایب برای تبدیل du_i به جنس طول می‌باشد. اگر خود متغیرها از جنس طول نباشند.

1- دستگاه مختصات کارتزین (x, y, z) (u_1, u_2, u_3) شرط: $x, y, z \in \mathbb{R}$

هر نقطه مثل $P(x, y, z)$ در محل برخورد 3 صفحه به معادلات $x = x, y = y, z = z$ قرار دارد.



$\hat{a}_x$: بردار یکم عمود بر صفحه x ثابت و در جهت افزایش x

$\hat{a}_y$: بردار دوم عمود بر صفحه y ثابت و در جهت افزایش y

$\hat{a}_z$: بردار سوم عمود بر صفحه z ثابت و در جهت افزایش z

$$\hat{a}_x \cdot \hat{a}_y = \hat{a}_x \cdot \hat{a}_z = \hat{a}_y \cdot \hat{a}_z = 0$$

$$\begin{cases} \hat{a}_x \times \hat{a}_y = \hat{a}_z \\ \hat{a}_y \times \hat{a}_z = \hat{a}_x \\ \hat{a}_z \times \hat{a}_x = \hat{a}_y \end{cases}$$

$$\vec{A} = A_1 \hat{a}_x + A_2 \hat{a}_y + A_3 \hat{a}_z$$

$$\text{مثال } \vec{A} = 2\hat{a}_x - \hat{a}_y + \hat{a}_z \quad \text{و} \quad \vec{B} = (x^2yz)\hat{a}_x + (3x)\hat{a}_y + 4\hat{a}_z$$

$$d\vec{L} = (h_1 du_1) \hat{a}_{u1} + (h_2 du_2) \hat{a}_{u2} + (h_3 du_3) \hat{a}_{u3}$$

مشتق متجه:

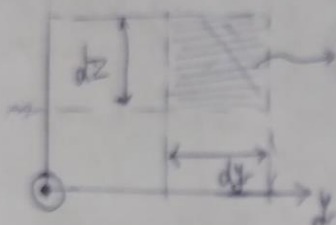
$$d\vec{L} = (h_1 dx) \hat{a}_x + (h_2 dy) \hat{a}_y + (h_3 dz) \hat{a}_z$$

برای مختصات دکارتی $h_1 = h_2 = h_3 = 1$ و dx, dy, dz طول اجزای

$$d\vec{L} = dx \hat{a}_x + dy \hat{a}_y + dz \hat{a}_z$$

تفاضل برداری سطح:

1- سطح $x = x_0$



$$d\vec{L} = ds_x = dy dz \hat{a}_x \quad (\text{مساحت سطح موازی به } x)$$

$$dL_2 dL_3 = (h_2 dy)(h_3 dz) = dy dz$$

(2) سطح $y = y_0$

مساحت $ds_1 = dx dz$

$$ds_2 = ds_y = dx dz$$

(3) سطح $z = z_0$

$$ds_3 = ds_z = dy dx$$

تفاضل برداری حجم:

$$dV = dL_1 dL_2 dL_3 = (h_1 dx)(h_2 dy)(h_3 dz) = dx dy dz$$



مثال: محاسبه انتگرال خطی و سطحی و حجمی

$$\vec{A} = 2\hat{a}_x - \hat{a}_y + \hat{a}_z$$

(1) $\oint \vec{A} \cdot d\vec{L}$

$$\vec{B} = \hat{a}_x + 4\hat{a}_y + 2\hat{a}_z$$

(2) $\vec{A} \cdot \vec{B}$

$$\vec{C} = (xy^2z)\hat{a}_x + (2x)\hat{a}_y - \hat{a}_z \rightarrow \text{محاسبه } \oint \vec{C} \cdot d\vec{L} \quad (3)$$

الف) $\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} = 3\hat{a}_x + 3\hat{a}_y - \hat{a}_z$

$|\vec{D}| = \sqrt{(3)^2 + (3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{19}$

ب) $\vec{A} \cdot \vec{B} = (2)(1) + (-1)(4) + (1)(-2) = 2 - 4 - 2 = -4$

ج) $\vec{C} \big|_P = 2\hat{a}_y - \hat{a}_z$ و $\vec{C} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \hat{a}_x(-4+4) - \hat{a}_y(-4+4) + \hat{a}_z(0-2)$

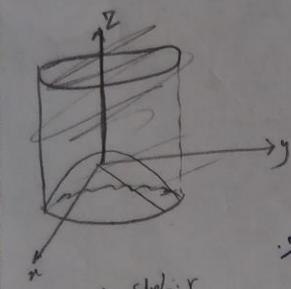
$\frac{\vec{B} + 2\vec{A}}{|\vec{B} + 2\vec{A}|} = \frac{5\hat{a}_x + 2\hat{a}_y}{\sqrt{29}} = \frac{5}{\sqrt{29}}\hat{a}_x + \frac{2}{\sqrt{29}}\hat{a}_y$

$\vec{B} + 2\vec{A}$ بردار یکدست

$\vec{B} \times \vec{C} = \vec{C} \times \vec{A}$ (برابر نیست)

$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$
 $\vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$



زاویه بین بردار شعاع و محور z
 زاویه بین بردار شعاع و محور x
 زاویه بین بردار شعاع و محور y

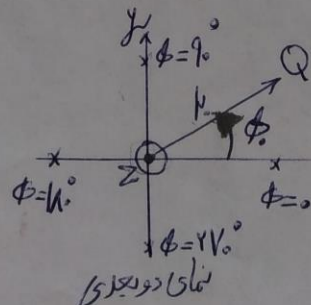
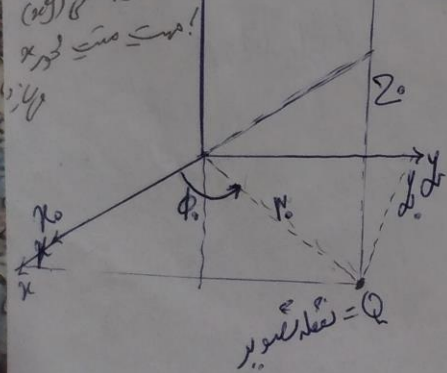
استاندارد استوانه ای: $(r, \phi, z) = (r, \phi, z)$

$\begin{cases} r = r_0 \\ \phi = \phi_0 \\ z = z_0 \end{cases}$ بردار واحد

$P(r, \phi, z)$ در محل برخورد سه دایره به معادلات

$P(r, \phi, z) = (r, \phi, z)$

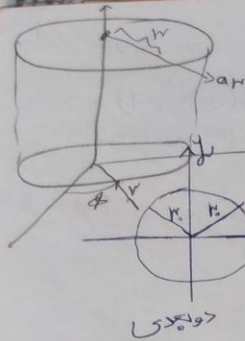
شرایط: $\begin{cases} -\infty < z < +\infty \\ r \geq 0 \\ 0 \leq \phi < 2\pi \end{cases}$



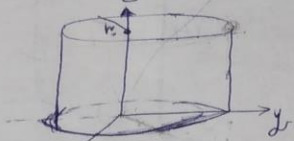
دو بردار زاویه بین بردار شعاع و محور z
 بردار شعاع به محور z

۱- رویه $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0$ و بردار پایه $\hat{a}_\mu$

۲- فاصله عمودی از محور z ها است.



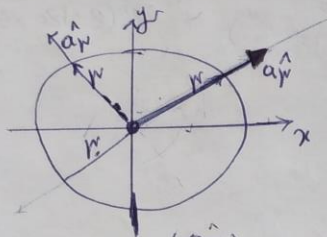
$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0$ مکان هندسی نقاطی که فاصله نقطه تصویر آن ها تا مبدأ مختصات برابر با $\mathcal{M}$ باشد.



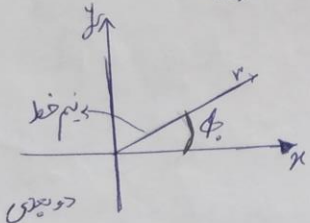
استوانه ای توخالی که فاصله نقطه تصویر آن ها تا مبدأ مختصات برابر با $\mathcal{M}$ باشد.

استوانه ای توخالی به شعاع $\mathcal{M}_0$ که محور آن محورهای باشد. نقاط واقع بر سطح جانبی نقاط مورد نظر می باشد. هر نقطه بر استوانه دارای مختصات $(\mathcal{M}_0, \phi, z)$ می باشد.

$\hat{a}_\mu$ بردار یک عمود بر سطح $\mathcal{M}$ است و در جهت افزایش $\mathcal{M}$ در راستای شعاع قاعده استوانه.

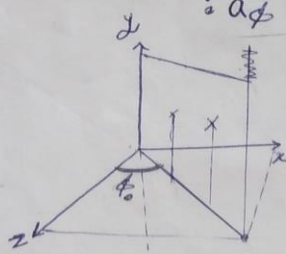


$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ به همبستگی است.



تذکره: جهت بردار پایه $\hat{a}_\mu$ در نقاط مختلف فضای تغییر می کند.

۲) سطح $\phi = \phi_0$ و بردار پایه $\hat{a}_\phi$:

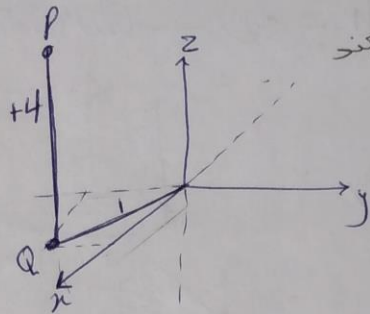
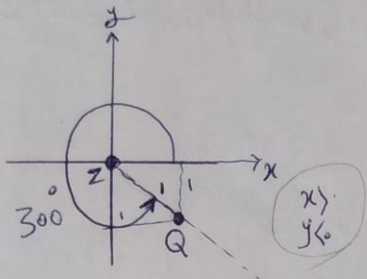


هر نقطه واقع بر این سطح دارای مختصات $(\mathcal{M}_0, \phi_0, z)$ می باشد.

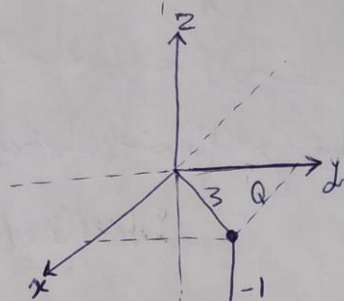
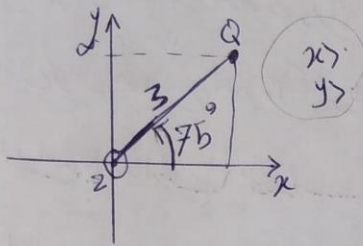
نقطه زیر را نمایش دهید

الف) $P_1(4, 300^\circ, 1)$

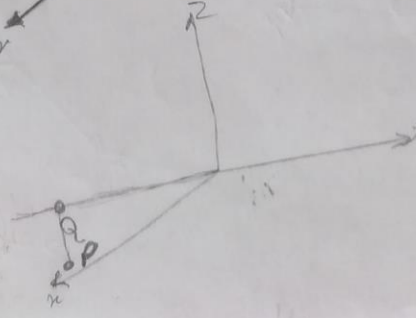
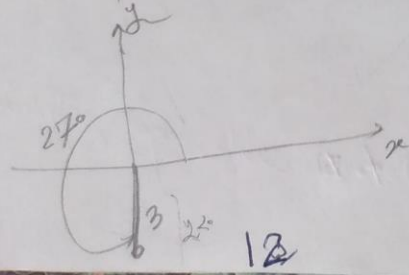
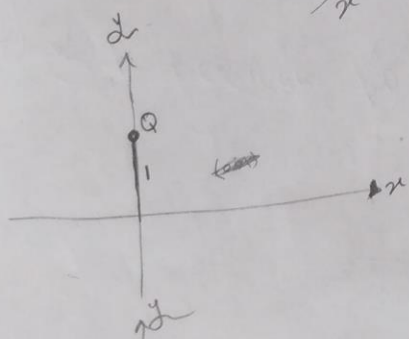
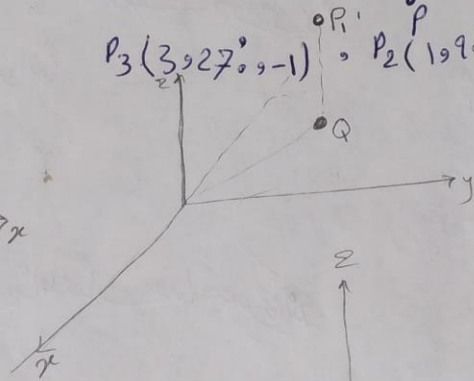
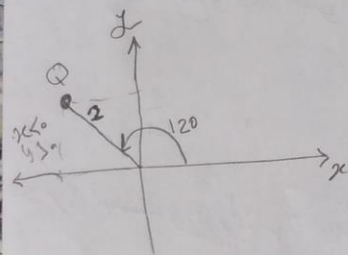
ابتدا در فضای دو بعدی زاویه را پیدا می‌کنیم
از روی آن جابجایی کنیم
در جهت خلاف عقربه‌های ساعت



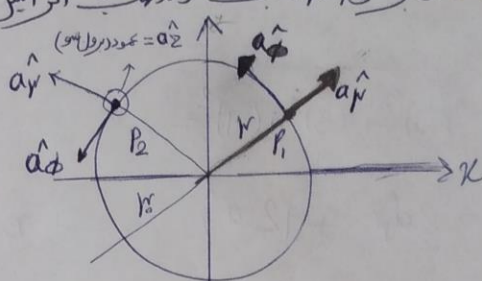
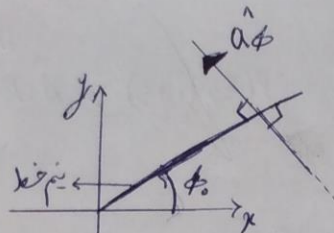
ب) $P_2(3, 75^\circ, -1)$



ج) $P_1(2, 120^\circ, 3)$, $P_2(1, 90^\circ, 0)$, $P_3(3, 270^\circ, -1)$

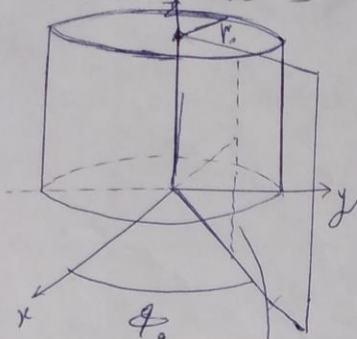


بردارید. محصور در صفحه ϕ ثابت و در جهت افزایش ϕ



a_ϕ آن را بر سطح بتواند و در نقطه P مماسی را که در آن امتداد این محاسبات راستای a_ϕ خواهد بود جهت مثبت آن جهت دور شدن از

* جهت بردار a_ϕ مریاً در نقاط مختلف فضاهای مختلف است.



خطی به موازات محور z ها.

سطح ϕ ثابت:

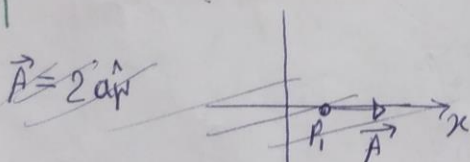
نیم صفحه ϕ ثابت که با محور z زاویه ϕ می سازد به محور z عمود است.

$$1) \hat{a}_r \cdot \hat{a}_\phi = \hat{a}_r \cdot \hat{a}_z = \hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_z = 0$$

$$2) \begin{cases} \hat{a}_r \times \hat{a}_\phi = \hat{a}_z \\ \hat{a}_\phi \times \hat{a}_z = \hat{a}_r \\ \hat{a}_z \times \hat{a}_r = \hat{a}_\phi \end{cases}$$

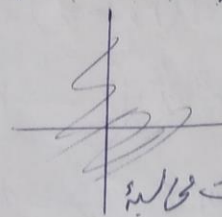
$$\vec{A} = A_1 \hat{a}_r + A_2 \hat{a}_\phi + A_3 \hat{a}_z$$

$$\text{مثال: } \vec{A} = 2\hat{a}_r + 3\hat{a}_\phi, \quad \vec{A} = (r \sin \phi) \hat{a}_r + (r^2 z) \hat{a}_\phi$$



$$\vec{A} = \hat{a}_r + 3\hat{a}_\phi - \hat{a}_z$$

$$\vec{B} = (r \sin \phi) \hat{a}_r + (r^2 z) \hat{a}_\phi \quad 13$$



مثال: بتوانیم بردارهای داده شده را به صورت یک بردار بنویسیم.



الف) $|A|$
ب) $\vec{A} \cdot \vec{B}$ $P(299^\circ, 3)$

$$|A| = \sqrt{(1)^2 + (3)^2 + (-1)^2} =$$

$$\vec{B} = 2\hat{r} + 12\hat{\phi} \rightarrow B = 2\hat{r} + 12\hat{\phi}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (1)(2) + (12)(3)$$

توجه: بردارها را ترسیم کنید

$$\vec{A} = \hat{r} + \hat{\phi} \quad P(1927^\circ, 0)$$

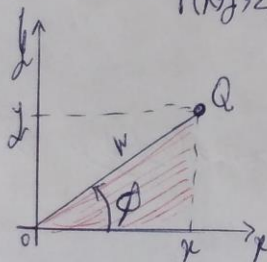
$$\vec{B} = \hat{r} - \hat{\phi} \quad P(1927^\circ, 0)$$

تبدیل مختصات قطبی از کارتزین به استوانه‌ای و برعکس
۱- تبدیل مختصات نقطه

۲- تبدیل مختصات بردارها

الف) تبدیل از کارتزین به استوانه‌ای:

$$P(x, y, z) \xrightarrow{\text{معمول}} P(r, \phi, z)$$



$$r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \phi = \frac{y}{x} = \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

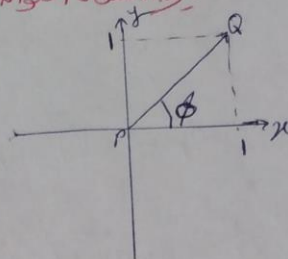
(با توجه به ربع مربوطه)



$$P_1(1, 1, -3) \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2} \\ \phi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$P_1\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, -3\right)$$

مثال: نقطه زیر را به دستگاه استوانه‌ای تبدیل کنید



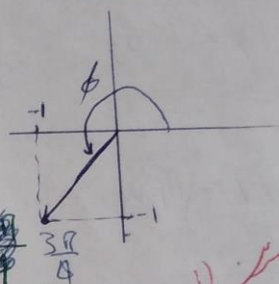
$$P_2(-1, -1, -3) \rightarrow r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{-1}\right) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$$P_2\left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}, -3\right)$$

$$P_1(-1, 1, 2) \rightarrow r = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{-1} = -1 = -\frac{\pi}{4}$$

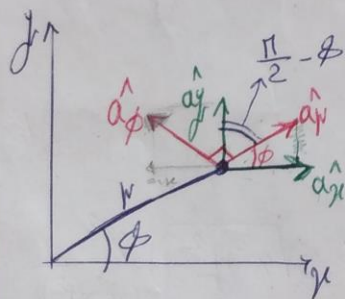


$$P_2(1, -1, 2) \rightarrow r = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \tan \alpha = \frac{-1}{1} = -1 = -\frac{\pi}{4}$$

$$P(r, \phi, z) \rightarrow P(x, y, z)$$

$$\cos \phi = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \phi$$

$$\sin \phi = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \sin \phi$$



$$\hat{a}_x \cdot \hat{a}_r = (1)(1) \cos \phi = \cos \phi$$

$$\hat{a}_x \cdot \hat{a}_\phi = (1)(1) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) = -\sin \phi$$

$$\hat{a}_y \cdot \hat{a}_r = (1)(1) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin \phi$$

$$\hat{a}_y \cdot \hat{a}_\phi = (1)(1) \cos \phi = \cos \phi$$

(-) تبدیل از استوانه‌ای به کارتزین:

رابطه بین برداری پایه کارتزین و استوانه‌ای:

تبدیل بردارها:

الف) تبدیل بردار از مختصات کارتزین به ...

$$\vec{A} = A_r \hat{a}_r + A_\phi \hat{a}_\phi + A_z \hat{a}_z \rightarrow \vec{A} = A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z \quad (1)$$

$$\vec{A} \cdot \hat{a}_x = (A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z) \cdot \hat{a}_x \Rightarrow \vec{A} \cdot \hat{a}_x = A_x (\hat{a}_x \cdot \hat{a}_x) + A_y (\hat{a}_x \cdot \hat{a}_y) + A_z (\hat{a}_x \cdot \hat{a}_z)$$

$$A_x = \vec{A} \cdot \hat{a}_x \quad \text{کلی: } A_i = \vec{A} \cdot \hat{a}_i$$

$$A_x = (A_r \hat{a}_r + A_\phi \hat{a}_\phi + A_z \hat{a}_z) \cdot \hat{a}_x = A_r (\hat{a}_x \cdot \hat{a}_r) + A_\phi (\hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_x) + A_z (\hat{a}_x \cdot \hat{a}_z)$$

$$A_x = A_r (\cos \phi) + A_\phi (-\sin \phi)$$

نکته: در عبارت سمت راست باید با استفاده از روابط تبدیل تلفیق شود و متغیرهای x و y نیویسد.

$$\cos \phi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \sin \phi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$A_y = \vec{A} \cdot \hat{a}_y = A_r (\sin \phi) + A_\phi (\cos \phi)$$

فرمولها:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{A} = (r \cos \phi) \hat{a}_r \rightarrow \text{مثال}$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos \phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$A_x = r \cos \phi = \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$A_y = r \sin \phi \cos \phi = \sqrt{x^2 + y^2} \frac{y}{r} \times \frac{x}{r}$$

مثال 2:

بردار را به دستگاه استوانه‌ای تبدیل کنید

استوانه‌ای → دکارتی

$$\vec{A} = (xz)\hat{y} \rightarrow \vec{A} = A_r \hat{a}_r + A_\phi \hat{a}_\phi$$

$$A_r = \vec{A} \cdot \hat{a}_r = (xz)(\hat{y} \cdot \hat{a}_r) = (xz)(\sin\phi) = (xz \sin\phi \cos\phi)$$

$$A_\phi = \vec{A} \cdot \hat{a}_\phi = (xz)(\hat{y} \cdot \hat{a}_\phi) = (xz)\cos\phi = xz \cos\phi$$

$$\vec{A} = (xz \sin\phi \cos\phi) \hat{a}_r + (xz \cos^2\phi) \hat{a}_\phi$$

تبدیل این بردارهای زیر را تبدیل کنید

$$\vec{A} = (xy)\hat{a}_x + (xz)\hat{a}_z, \quad \vec{B} = (r \sin\phi)\hat{a}_z$$

از استوانه‌ای

به دکارتی

ماتریسی تبدیل از دکارتی به استوانه‌ای را به دست آورید

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$A_r = \vec{A} \cdot \hat{a}_r \Rightarrow A_r = \hat{a}_r \cdot (A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z) = A_r = A_x (\hat{a}_x \cdot \hat{a}_r) + A_y (\hat{a}_y \cdot \hat{a}_r) + A_z (\hat{a}_z \cdot \hat{a}_r)$$

$$A_r = A_x \cos\phi + A_y \sin\phi$$

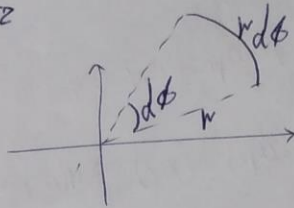
$$A_\phi = \vec{A} \cdot \hat{a}_\phi \Rightarrow \hat{a}_\phi \cdot (A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z) = A_x (\hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_x) + A_y (\hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_y) +$$

$$A_z (\hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_z) = A_\phi = A_x (-\sin\phi) + A_y (\cos\phi)$$

تغییر دیرانسیلی طول و ضرایب سری:

$$d\vec{l} = (h_1 dr) \hat{a}_r + (h_2 d\phi) \hat{a}_\phi + (h_3 dz) \hat{a}_z$$

بنابراین:
 $h_2 = r \Rightarrow h_1 = h_3 = 1$



$$d\vec{l} = dr \hat{a}_r + (r d\phi) \hat{a}_\phi + dz \hat{a}_z$$

۱- سطح دیرانسیلی سطح:
 سطح ۲ ثابت (r=r₀)

$$ds_1 = ds_r = dl_2 dl_3 = r d\phi dz$$

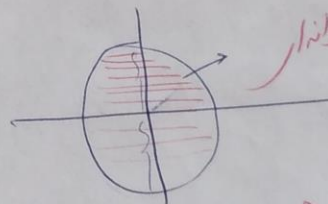
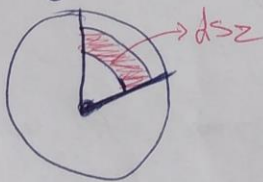
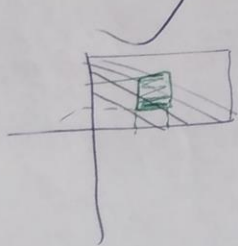
۲- سطح φ ثابت (φ=φ₀)

$$ds_2 = ds_\phi = dl_1 dl_3 = dr dz$$

۳- سطح z ثابت (z=z₀)

استوانه‌ای
 $ds_3 = ds_z = dl_1 dl_2 = r d\phi dr$

توجه: در کارتزین هم $ds_z = dr dy$ داریم، برابر است با $ds_z = dr dy$ که نحوه استفاده از آن به شکل مناسبی دارد. اگر شکل مربع یا مستطیل بود از کارتزین، و اگر دایره، نیم دایره، ربع دایره از استوانه‌ای استفاده می‌شود.



تغییر دیرانسیلی حجم:

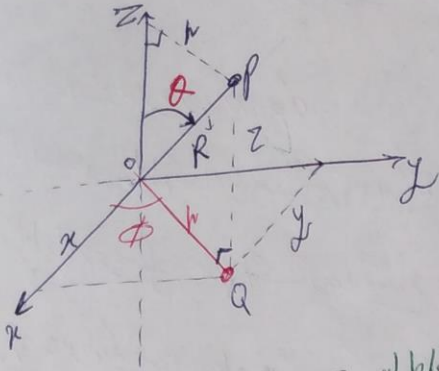
$$dV = dl_1 dl_2 dl_3 = r dr d\phi dz$$

3- دستگاه مختصات سه‌بعدی (نویس)

$$(u_1, u_2, u_3) = (R, \theta, \phi)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R = R_0 \\ \theta = \theta_0 \\ \phi = \phi_0 \end{array} \right. \text{تعداد دارد}$$

در نقطه مشخص $P(R_0, \theta_0, \phi_0)$ در محل برخورد سه محور به معادلات



شرایط

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ R \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{array} \right.$$

(ساعتگرد یا پاد ساعتگرد)

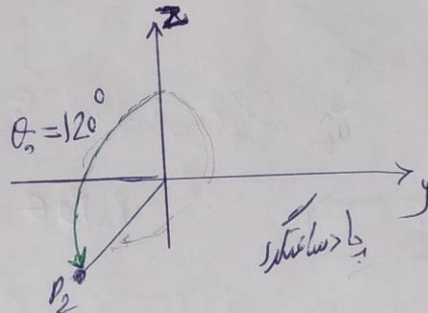
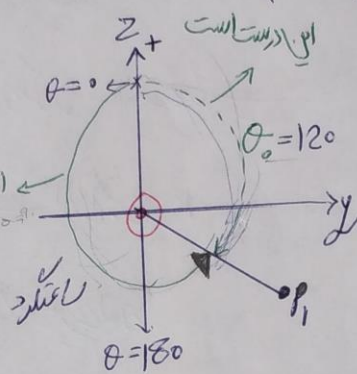
اویه ای که از 180° کمتر است
اینجا - می‌شود

نکته:

بالای xy $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \rightarrow z > 0$

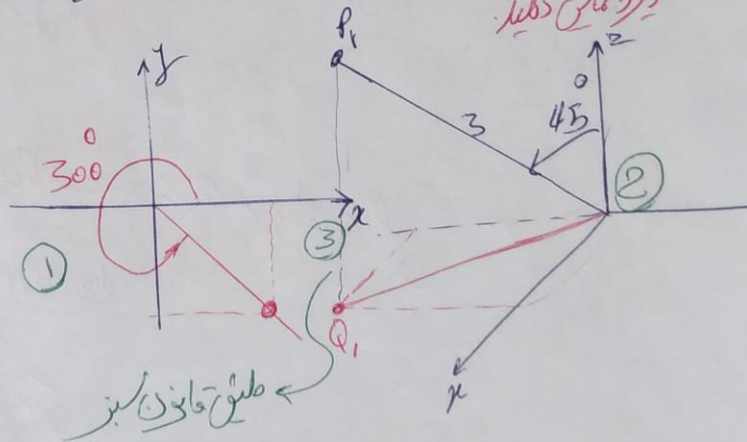
زیر xy $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \rightarrow z < 0$

صفحه xy $\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow z = 0$



الف: طریقه راغالبی دهید

$(300^\circ, 45^\circ, 3)$ الف



تمرین: نقاط را مشخص کنید

$$P_1(2, 120^\circ, 45^\circ)$$

$$P_2(1, 270^\circ, 180^\circ)$$

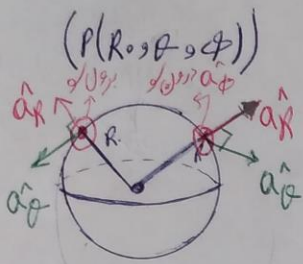
$$P_3(4, 30^\circ, 20^\circ)$$

نقطه حالتی که $\theta = 90^\circ$ باشد نقطه وسط و محور روی هم می افتند.

روی $R=R_0$ و بردار پایه $\hat{a}_R$:

مکان هندسی نقطه ای که فاصله مشخصی از مرکز باشد برای R_0 می باشد.

نقاط واقع بر سطح جانبی یک کره به شعاع R و مرکز مبدأ مختصات:

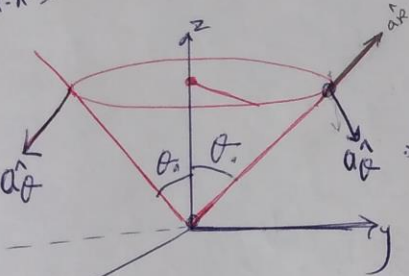


$R=R_0$ روی

$\hat{a}_R$: بردار یک عمود بر سطح R ثابت و در جهت افزایش R

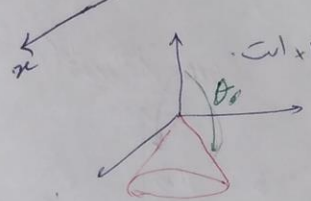
نکته: بردار پایه $\hat{a}_R$ می باشد آن در فضا تغییر می کند.

روی $\theta = \theta_0$ و بردار پایه $\hat{a}_\theta$:



نقاط واقع بر سطح جانبی یک مخروط به زاویه رأس θ_0 که محور آن محور z می باشد.

$$P(R, \theta, \phi)$$



نسبت a_θ در جهت دور شدن از θ_0 است.

نکته: اگر $\theta < 90^\circ$ باشد شکل مخروط وارونه می گردد.

بردار پایه $\hat{a}_\theta$: بردار یک عمود بر سطح θ ثابت و در جهت افزایش θ

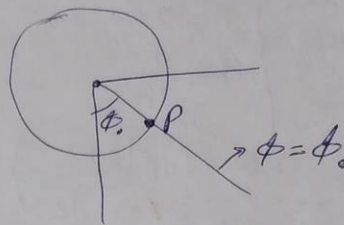
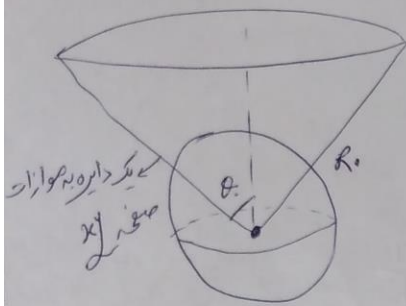
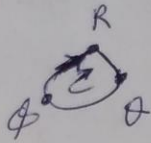
نکته: $\hat{a}_R$: عمود بر سطح کره، $\hat{a}_\theta$: عمود بر سطح مخروط، $\hat{a}_\phi$: مماس بر مخروط

$\hat{a}_\phi$: عمود بر سطح مخروط، مماس بر کره

خصوصیات کروی:

$$a_R \cdot \hat{a}_\theta = \hat{a}_R \cdot a_\theta = \hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_\phi = 0 \quad (1)$$

$$\begin{cases} \hat{a}_R \times \hat{a}_\theta = \hat{a}_\phi \\ \hat{a}_\theta \times \hat{a}_\phi = \hat{a}_R \\ \hat{a}_\phi \times \hat{a}_R = \hat{a}_\theta \end{cases} \quad (2)$$



$$\vec{F} = R_R \hat{a}_R + R_\theta \hat{a}_\theta + R_\phi \hat{a}_\phi$$

مثال: $\vec{A} = (R \sin \theta) \hat{a}_R + 3 \hat{a}_\phi$

$$\vec{B} = 2 \hat{a}_\theta + 3 \hat{a}_R$$

$$\begin{aligned} A \cdot B &= 8 \\ A \times B &= 8 \\ |A| &= 8 \\ |B| &= 8 \end{aligned}$$

تبدیل مختصات از کارتزین به کروی و برعکس:

$$\sin \theta = \frac{r}{R} \Rightarrow r = R \sin \theta$$

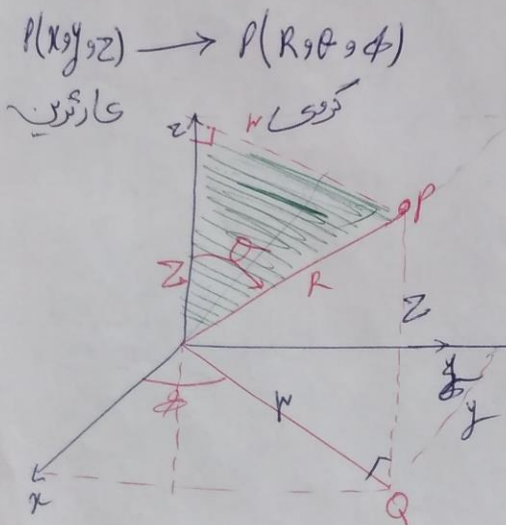
$$R^2 = r^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \rightarrow$$

$$\tan \theta = \frac{r}{z} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \Rightarrow$$

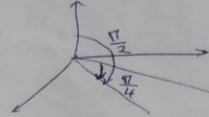
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$$



شکل زیر را به دستگاه دایره تبدیل کنید.

$$P_1(1, 1, \sqrt{2}) = \begin{cases} R = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (\sqrt{2})^2} = 2 \\ \phi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$P_2(1, 1, -\sqrt{2}) = \begin{cases} R = 2 \\ \phi = \frac{\pi}{4} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$



$$P_1(1, 1, \sqrt{2})$$

$$P_3(-1, -1, -\sqrt{2})$$

$$P_2(-1, 1, \sqrt{2})$$

$$P_4(1, -1, -\sqrt{2})$$

$$P_4 = R = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{1 + 1 + 2} = 2$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \tan^{-1} \frac{-1}{1} = \phi = -\frac{\pi}{4} \rightarrow$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}{-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -1 \rightarrow \tan^{-1} = -\frac{\pi}{4} \rightarrow \boxed{\frac{3\pi}{4}} \leftarrow \theta$$

2c

شماره ۲۰۰ - از روی به کار بریز:

$$P(R, \theta, \phi) \rightarrow P(x, y, z)$$

$$x = r \cos \phi = R \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi = R \sin \theta \sin \phi$$

$$\cos \theta = \frac{z}{R} = \frac{z}{R \cos \theta}$$

حالت به شکل حالت خود

$$P(R, \theta, \phi) \rightarrow P(r, \phi, z)$$

$$\left. \begin{aligned} r &= R \sin \theta \\ \phi &= \phi \\ z &= R \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

نکته: روابط تبدیل مستقیم از روی به استوانه و برعکس را به دست آورید.

$$\begin{aligned} P(r, \phi, z) &\rightarrow (R, \theta, \phi) \\ R &= \sqrt{r^2 + z^2} \\ \phi &= \phi \\ \theta &= \tan^{-1} \frac{r}{z} \end{aligned}$$

اینها دو بردار واحد در مختصات است

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{a}_r &= (\cos \theta) \hat{a}_z + (\sin \theta) \hat{a}_\phi \quad (1) \\ \hat{a}_\theta &= (-\sin \theta) \hat{a}_z + (\cos \theta) \hat{a}_\phi \quad (2) \end{aligned} \right.$$

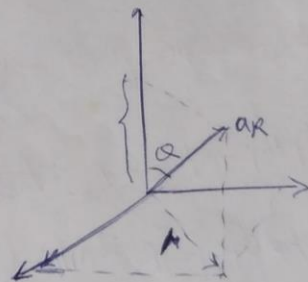
$$\hat{a}_x \cdot \hat{a}_r = \cos \theta (\hat{a}_x \cdot \hat{a}_z) + \sin \theta (\hat{a}_x \cdot \hat{a}_\phi)$$

$$\hat{a}_x \cdot \hat{a}_r = \sin \theta \cos \phi$$

$$\hat{a}_y \cdot \hat{a}_r = \sin \theta \sin \phi$$

$$\hat{a}_z \cdot \hat{a}_r = \cos \theta$$

رابطه بین بردارهای پایه:



$$\hat{a}_x \cdot \hat{a}_\theta = \cos\theta \cos\phi$$

$$\hat{a}_y \cdot \hat{a}_\theta = \cos\theta \sin\phi$$

$$\hat{a}_z \cdot \hat{a}_\theta = -\sin\theta$$

مثال 1: بردار رادیان در دستگاه قطبی نمایش دهید.

$$\vec{A} = (x) \hat{a}_y \rightarrow \vec{A} = A_R \hat{a}_R + A_\theta \hat{a}_\theta + A_\phi \hat{a}_\phi$$

$$A_R = \vec{A} \cdot \hat{a}_R = x(\hat{a}_y \cdot \hat{a}_R) = x(\sin\theta \sin\phi) = (R \sin\theta \cos\phi)(\sin\theta \sin\phi)$$

$$A_\theta = \vec{A} \cdot \hat{a}_\theta = x(\hat{a}_y \cdot \hat{a}_\theta) = x(\cos\theta \sin\phi) = (R \sin\theta \cos\phi)(\cos\theta \sin\phi)$$

$$A_\phi = \vec{A} \cdot \hat{a}_\phi = x(\hat{a}_y \cdot \hat{a}_\phi) = x(\cos\phi) = (R \sin\theta \cos\phi)(\cos\phi)$$

مثال 2: بردار رادیان را به طور مستقیم به دستگاه متوازی تبدیل کنید.

$$\vec{A} = (R \sin\theta) \hat{a}_\theta + (2R) \hat{a}_\phi$$

$$\vec{A} = A_R \hat{a}_R + A_\theta \hat{a}_\theta + A_\phi \hat{a}_\phi$$

$$A_R = \vec{A} \cdot \hat{a}_R = R \sin\theta (\hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_R) + 2R (\hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_R) = (R \sin\theta) \cos\theta =$$

$$A_\phi = 2R$$

$$A_z = \vec{A} \cdot \hat{a}_z = R \sin\theta (\hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_z) = -R \sin\theta \sin\theta$$

مثال 3: در مثال قبلی مولفه های A_R ، A_θ ، A_ϕ را به A_x ، A_y ، A_z تبدیل کنید.

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$A_R = \sqrt{x^2 + y^2} \times \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \times \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$A_\phi = 2R \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$A_z = \sqrt{x^2 + y^2} \times \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \times \sin\theta$$

$$r = R \sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{r}{R}$$

۱- پیوارا در کسب و کارهای کارگری و استوانه در صنعت پلاستیک / دهید

$$H_0 = A_Y \hat{a}_Y + A_\phi \hat{a}_\phi + A_Z \hat{a}_Z \longrightarrow$$

$$\vec{dl} = (dr) \hat{a}_r + (r d\theta) \hat{a}_\theta + (r \sin\theta d\phi) \hat{a}_\phi$$

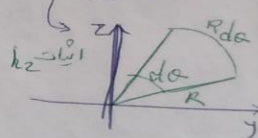
$$ds_3 = ds_4 = dl_1 dl_2 = R dR d\phi$$

25

$$h_1 = 1$$

$$h_3 = r = R \sin \alpha$$

$$h_2 = R$$

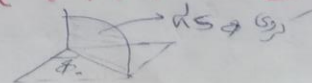
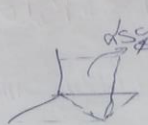


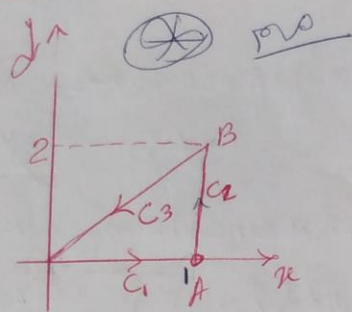
انجمن دین و اخلاق

$$(\frac{1}{\rho R}) R = R_0 \quad \text{check!}$$

(2) $\varphi = 0$ (بصورت)

(5) $\phi = \phi_0$ (ناب) (ϕ_0)





$$I = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{L} \quad (\text{مثال 2})$$

$$C = C_1 + C_2 + C_3$$

یعنی مسیر بسته است

دستگاه کارتزین است - چون یک خط است -

$$\vec{F} = (x)\hat{a}_x + (xy)\hat{a}_y$$

$$d\vec{L} = dx\hat{a}_x + dy\hat{a}_y + dz\hat{a}_z$$

$$C_1 = d\vec{L} = dx\hat{a}_x \rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{L} = x dx \rightarrow I_1 = \int_0^2 x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^2 = \frac{1}{2}$$

$$C_2 = d\vec{L} = dy\hat{a}_y \rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{L} = xy dy \rightarrow I_2 = \int_0^2 xy dy = \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^2 = 2$$

$$C_3 = d\vec{L} = dx\hat{a}_x + dy\hat{a}_y \Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{L} = x dx + \overset{(x=1)}{xy} dy$$

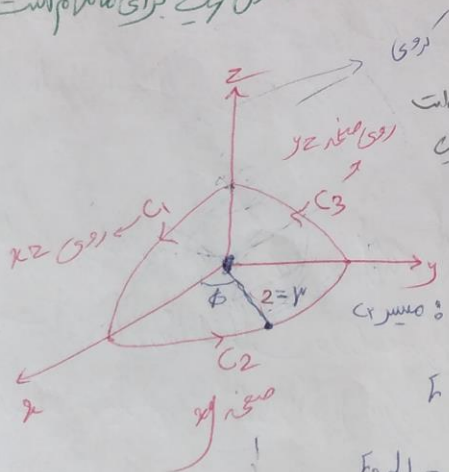
$$I_3 = \int_1^2 x dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 xy dy$$

باید در محاسبه نوشتن شود $y=2x$
در انتگرال قسمت اول مرتبه برای محاسبه است

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{L}$$

مثال 1



قبل مستطی از زوایا
در مختصات قطبی

$$\vec{F} = x\hat{a}_x + z\hat{a}_z$$

$$d\vec{L} = dr\hat{a}_r + r d\phi \hat{a}_\phi + dz \hat{a}_z$$

$$\vec{F} = x\hat{a}_x + z\hat{a}_z$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{L} = r d\phi \hat{a}_\phi \cdot x\hat{a}_x \Rightarrow -rx \sin\phi d\phi \Rightarrow$$

$$-rx^2 \cos\phi \sin\phi d\phi \Rightarrow$$

۲- مقدار R مقدار است

$$d\vec{L} = dR \hat{a}_R + R d\theta \hat{a}_\theta + R \sin\theta d\phi \hat{a}_\phi$$

$$C_3 = (x \hat{a}_x + z \hat{a}_z) \cdot R d\theta \hat{a}_\theta = x R \hat{a}_x \cdot \hat{a}_\theta + z R \hat{a}_z \cdot \hat{a}_\theta \Rightarrow (x R \cos\theta \cos\phi - z R \sin\theta) d\theta$$

در هر نقطه، ϕ و z ثابت است $\Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$ است

$$\vec{F} \cdot d\vec{L} = -z R \sin\theta d\theta = -R \sin\theta d\theta \Rightarrow I_3 = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -R \sin\theta d\theta$$

$$C_1 = (x \hat{a}_x + z \hat{a}_z) \cdot R d\phi \hat{a}_\phi = (x R \cos\theta \cos\phi - z R \sin\theta) d\phi \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (x R \cos\theta \cos\phi - z R \sin\theta) d\phi$$

در اینجا θ و z ثابت است $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ است

$$C_2 = (x \hat{a}_x + z \hat{a}_z) \cdot R d\phi \hat{a}_\phi = x R (-\sin\phi) + 0 = -x R \sin\phi d\phi \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -x R \sin\phi d\phi = -x R \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin\phi d\phi$$

$$-x R (1) = -x R$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{L} = \cos\theta - \sin\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos\theta - \sin\theta = (\sin\theta + \cos\theta) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 = (1 + 1 + 0) = 2$$

بردار
استوار

$$I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{L}$$

2- اشتراک‌های خطی - برداری:

مثال

$$I = \int_C (r \hat{a}_r) dL = \hat{a}_r \int_C r dL$$

نکته: بردارهای $\hat{a}_r$ و $\hat{a}_\phi$ و $\hat{a}_\theta$ چون در یک نقطه فضای دارای جهت ثابت نمی‌باشند می‌توان آن‌ها را از اشتراک بیرون آورد

$$I = \int_C (2r \cos\phi) \hat{a}_r dL \neq \hat{a}_r \int_C (2r \cos\phi) dL$$

نکته 2: بردارهای $\hat{a}_r$ و $\hat{a}_\phi$ و $\hat{a}_\theta$ در نقاط مختلف فضای تغییر می‌کند
برای این می‌توان آن‌ها را از اشتراک بیرون آورد

برای حل این مشکل بردارهای ثابت شده را به کمک ترکیب خطی بردارهای $\hat{a}_x$ و $\hat{a}_y$ و $\hat{a}_z$ می‌نویسیم و می‌توانیم

مثال

$$\hat{a}_r = A_1 \hat{a}_x + A_2 \hat{a}_y + A_3 \hat{a}_z$$

اشتراک‌های حاصل را با هم ترکیب می‌کنیم

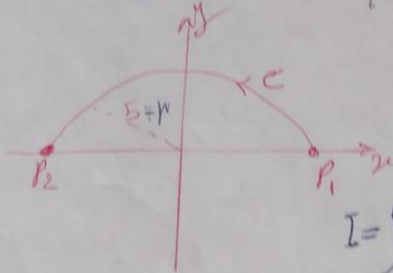
$$\int \hat{a}r = \int (A_1 \hat{a}x + A_2 \hat{a}y + A_3 \hat{a}z) = \hat{a}x \int + \hat{a}y \int + \hat{a}z \int =$$

$$K_1 \hat{a}x + K_2 \hat{a}y + K_3 \hat{a}z$$

$$A_1 \hat{a}r \cdot \hat{a}x = A_1 (\hat{a}x \cdot \hat{a}x) + A_2 (\hat{a}y \cdot \hat{a}x) + A_3 (\hat{a}z \cdot \hat{a}x) = A_1 = \hat{a}x \cdot \hat{a}r = \cos\phi$$

$$A_2 \hat{a}r \cdot \hat{a}y = A_1 (\hat{a}x \cdot \hat{a}y) + A_2 (\hat{a}y \cdot \hat{a}y) + A_3 (\hat{a}z \cdot \hat{a}y) = \sin\phi$$

$$A_3 \hat{a}r \cdot \hat{a}z = A_1 (\hat{a}x \cdot \hat{a}z) + A_2 (\hat{a}y \cdot \hat{a}z) + A_3 (\hat{a}z \cdot \hat{a}z) = 0$$



$$\vec{F} = (R \sin\phi) \hat{a}_\phi$$

نشان می دهد که این بردار در جهت شعاع است

$$I = \int (R \sin\phi) \hat{a}_\phi dl = \hat{a}_\phi \int R \sin\phi dl$$

$$\hat{a}_\phi = A_1 \hat{a}x + A_2 \hat{a}y = (-\sin\phi) \hat{a}x + (\cos\phi) \hat{a}y$$

$$I = \int R \sin\phi [-\sin\phi \hat{a}x + \cos\phi \hat{a}y] R d\phi$$

$$= \hat{a}x \int_0^\pi -2R^2 \sin^2\phi d\phi + \hat{a}y \int_0^\pi 2R^2 \sin\phi \cos\phi d\phi$$

دو انتگرال جداگانه

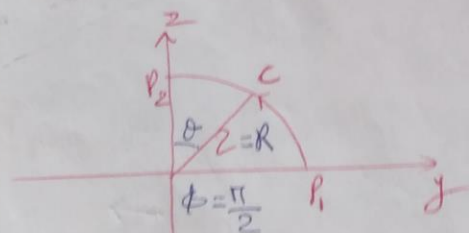
$\int_0^\pi \sin^2\phi d\phi = \frac{\pi}{2}$

$\int_0^\pi \sin\phi \cos\phi d\phi = 0$

$d\phi = \frac{dl}{R}$

(dl)

$$K_1 \hat{a}x + K_2 \hat{a}y$$



$$\vec{F} = (R \sin\phi) \hat{a}_r$$

$$I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$\hat{a}_r = A_1 \hat{a}x + A_2 \hat{a}y + A_3 \hat{a}z$$

$$\hat{a}_r \cdot \hat{a}y = A_2 \Rightarrow A_2 = \sin\alpha \sin\phi$$

$$\hat{a}_r \cdot \hat{a}z = A_3 \Rightarrow A_3 = \cos\phi$$

$$\hat{a}_r \cdot \hat{a}x = A_1 \Rightarrow A_1 = \sin\alpha \cos\phi$$

$$\hat{a}_R = \sin\theta \sin\phi \hat{a}_x + \cos\theta \sin\phi \hat{a}_y + \cos\theta \hat{a}_z$$

$$\vec{r} = (R \sin\theta) \hat{a}_R \rightarrow (R \sin\theta) (\sin\theta \sin\phi \hat{a}_x + \cos\theta \sin\phi \hat{a}_y + \cos\theta \hat{a}_z) \cdot (R d\theta)$$

$$dL = R dR \hat{a}_R + R d\theta \hat{a}_\theta + R \sin\theta d\phi \hat{a}_\phi$$

$$(R \sin\theta) (\sin\theta \sin\phi \hat{a}_x + \cos\theta \sin\phi \hat{a}_y + \cos\theta \hat{a}_z) \cdot (R d\theta)$$

$$\int \frac{R}{2} \sin\theta \sin\phi \hat{a}_x d\theta + \int \sin\theta \cos\theta \hat{a}_z d\theta$$

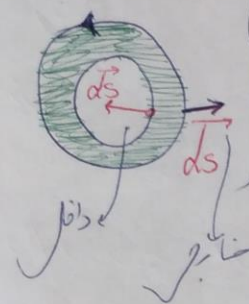
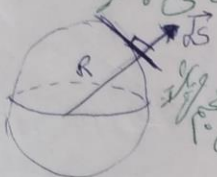
$$I = \int_S \vec{r} \cdot d\vec{s}$$

(2) اشکال های سطحی: سطحی - عددی

سطحی - برداری

مفهوم اشکال سطحی: شکل را بردار $\vec{r}$ از سطح و خارج می شود.

$I = \int_S \vec{r} \cdot d\vec{s}$ برداری
در $d\vec{s}$ هم جهت دو مؤلفه
با هم در حال عمل می کنند
یعنی مؤلفه ها
یکدیگر را
نمی بینیم



اشکال سطحی عددی: با توجه به هندسه $\vec{r}$ که مناسب را انتخاب کرده، $\vec{r} \cdot d\vec{s}$ را بدست آورده و در نهایت $\int \vec{r} \cdot d\vec{s}$ که یک اشکال انتگرالی پدیدار می آید - می آوریم.